

## 2020 臺灣中小學數學能力檢定考試 TMT11

## 單選題

1. 因為地球暖化因素，某地區的冬天氣溫創下有觀測記錄以來的高溫。下列統計表為某日 10 個觀測時間所測得的溫度。

時間(時)	01	03	05	07	09	11	13	15	17	19
溫度(°C)	34.5	34	34	35.6	36.4	36.6	37.5	38.5	37.9	35

試求這 10 個觀測時間的平均溫度為下列哪一個選項？

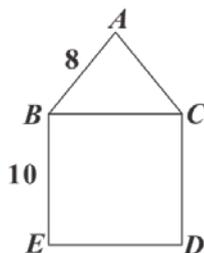
- (A) 34°C            (B) 35°C            (C) 36°C            (D) 37°C            (E) 38°C
2. 設  $a = \sqrt{99}$ ， $b = \sqrt[3]{99^2}$ ， $c = \sqrt[4]{99^3}$ ，試選出正確的大小關係：
- (A)  $a > b > c$       (B)  $b > a > c$       (C)  $b > c > a$       (D)  $c > a > b$       (E)  $c > b > a$
3. 設  $\frac{1}{a+b}$ ， $\frac{1}{b+c}$ ， $\frac{1}{c+a}$  成等差數列，則下列何者也成等差數列？
- (A)  $a^2, b^2, c^2$       (B)  $c^2, a^2, b^2$       (C)  $a, b, c$             (D)  $c, a, b$             (E)  $\frac{1}{c}, \frac{1}{a}, \frac{1}{b}$
4. 九九登山背包店進行周年慶活動，推出「任買兩件打 7 折」的活動。已知該店共有 8 款登山背包可供選擇，其價格如下：
- |       |     |     |     |     |     |     |     |     |
|-------|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|
| 款式    | 甲   | 乙   | 丙   | 丁   | 戊   | 己   | 庚   | 辛   |
| 價格(元) | 670 | 670 | 700 | 700 | 700 | 730 | 730 | 730 |
- 若某顧客依優惠方案購買兩個背包，則一共有多少種不同的付款金額？
- (A) 3                    (B) 4                    (C) 5                    (D) 6                    (E) 7
5. 甲、乙、丙三人在排成一列的八個座位中選三個座位入坐，但不能三個人的座位全相連，共有幾種坐法？
- (A) 300 種            (B) 216 種            (C) 252 種            (D) 5040 種            (E) 336 種
6. 空間中，兩直線  $L_1: \frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{3} = \frac{z-2}{1}$ ， $L_2: \frac{x-1}{1} = \frac{y}{1} = \frac{z+1}{2}$ ，則  $L_1$  與  $L_2$  的關係為下列哪一選項？
- (A)  $L_1$  與  $L_2$  恰交於一點            (B)  $L_1$  與  $L_2$  平行            (C)  $L_1$  與  $L_2$  重合  
(D)  $L_1$  與  $L_2$  為歪斜線            (E) 同時包含  $L_1$  與  $L_2$  的平面不只一個

7. 設  $A(-1,3)$ ， $B(2,-1)$ ，直線  $L$  的參數方程式為  $\begin{cases} x=2+3t \\ y=k-t \end{cases}$ ， $t$  為實數，若線段  $AB$  與直線  $L$  相交，則  $k$  的範圍為何？  
 (A)  $0 \leq k \leq 2$       (B)  $-2 \leq k \leq 1$       (C)  $1 \leq k \leq 4$       (D)  $-1 \leq k \leq 2$       (E)  $1 \leq k \leq 2$
8.  $\triangle ABC$  中，若  $\overline{AB}=2$ ， $\overline{AC}=3$ ， $\overline{BC}=4$  且  $\angle A$  的角平分線  $\overline{AD}$  交  $\overline{BC}$  於  $D$  點，則  $\left| \overrightarrow{AD} \right| = ?$   
 (A)  $\frac{2\sqrt{6}}{7}$       (B)  $\frac{3\sqrt{6}}{7}$       (C)  $\frac{4\sqrt{6}}{7}$       (D)  $\frac{2\sqrt{6}}{5}$       (E)  $\frac{3\sqrt{6}}{5}$
9. 袋中有 2 號球 2 個，3 號球 3 個，4 號球 4 個(共 9 個球)，現由袋中每次取一球，取後不  
 放回，則取到的前 3 球號碼均不相同的機率為何？  
 (A)  $\frac{2}{7}$       (B)  $\frac{2}{9}$       (C)  $\frac{4}{9}$       (D)  $\frac{3}{14}$       (E)  $\frac{1}{21}$
10. 坐標空間中，一質點從  $(1,-2,3)$  出發，沿著向量  $(2,5,-4)$  的方向等速前進。請問此質點會  
 最先碰到下列哪一個平面？  
 (A)  $xy$  平面      (B)  $xz$  平面      (C)  $yz$  平面  
 (D) 平面  $x+y+z=4$       (E) 平面  $x-y+z=7$
11. 已知一個三角形的三邊邊長為連續偶數，且最大角為最小角的 2 倍，試求此三角形的周  
 長為 \_\_\_\_\_。  
 (A) 24      (B) 30      (C) 36      (D) 42      (E) 48
12. 已知  $\sin\alpha = \cos^2\alpha$ ，則  $\cos^4\alpha + \frac{1}{\sin\alpha} = ?$   
 (A)  $\frac{3-\sqrt{5}}{2}$       (B)  $\frac{\sqrt{5}+1}{2}$       (C) 1      (D)  $\frac{1}{2}$       (E) 2
13. 設  $F$  為橢圓  $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$  的一個焦點，則此橢圓有多少個點到  $F$  的距離是整數？  
 (A) 8      (B) 9      (C) 10      (D) 16      (E) 18

14. 細菌分裂增為原來的兩倍所需的時間，稱為世代時間(Generation time)，細菌的世代時間決定於細菌的種類及環境條件的影響。目前實驗室在老鼠身上發現一種細菌，觀察細菌後，發現時間  $x$ (分)與數量的對數值(以 10 為底)  $y$  之關係圖為通過  $(0, 3.7)$  及  $(50, 4)$  的一條直線，則此細菌的世代時間約為幾分鐘？( $\log 2 \approx 0.3010$ ， $\log 3 \approx 0.4771$ ， $\log 7 \approx 0.8451$ )
- (A) 30分            (B) 40分            (C) 50分            (D) 60分            (E) 70分
15. 若  $\triangle ABC$  內接於半徑為 1 的單位圓， $O$  為圓心，且  $k\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + 2\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{0}$ ，則下列哪一個  $k$  值，會使  $\angle BOC$  最大？
- (A)  $\sqrt{2}$             (B)  $\sqrt{3}$             (C)  $\sqrt{5}$             (D)  $\sqrt{6}$             (E)  $\sqrt{7}$

選填題
-----

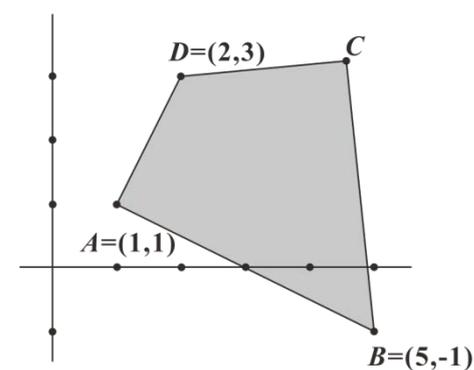
1. 設多項式  $f(x) = ax^3 + bx^2 - 2x + 3$  除以  $(x-1)$  的餘式為 2，且  $f(x)$  除以  $(x+1)$  的餘式為  $-4$ ，則  $100a + b$  之值為 \_\_\_\_\_。
2. 如下圖所示，將一個等腰三角形  $ABC$  與一個正方形  $BEDC$  相接合，已知  $\overline{AB} = 8$ ， $\overline{BE} = 10$ ，若  $\sin \angle ABE = \frac{b}{a}$  (最簡分數)，則  $10a + b$  之值為 \_\_\_\_\_。



3. 設有一組 8 筆的資料，所有的數值皆為整數，且當中最小的數值是 101，資料全距為 8。設此資料的標準差最小可能值為  $s$ ，則  $s^2 =$  \_\_\_\_\_。
4. 若  $20^{20}$  是一個  $n$  位數 ( $n$  為正整數)，則  $n =$  \_\_\_\_\_。
5. 方程式  $\log_2(2^{2x} - 64) = x + \log_2 3 + 2$  的解  $x =$  \_\_\_\_\_。
6. 若兩矩陣  $A = \begin{bmatrix} 2 & a \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$ ， $B = \begin{bmatrix} -1 & 5 \\ 1 & b \end{bmatrix}$  滿足  $(A+B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$ ，則  $a^2 + b^2 =$  \_\_\_\_\_。
7. 若一數列  $\{a_n\}$  從第三項起，每一項都等於前兩項的和，例如 2, 5, 7, 12, 19, ... 則稱此數列為  $F$  型數列。下面的方格中，若每一行以及每一列的數都是  $F$  型數列，則  $a =$  \_\_\_\_\_。

1			
	5		
			21
		22	$a$

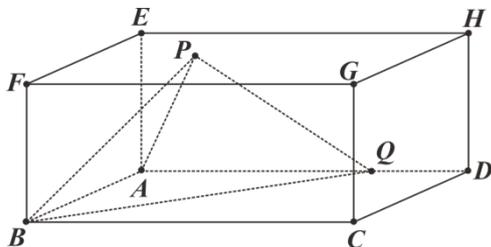
8. 設  $\triangle ABC$  三邊長  $\overline{AB} = 10$ ， $\overline{BC} = 14$ ， $\overline{CA} = 12$ 。現分別以  $\overline{AB}, \overline{AC}$  為斜邊，往  $\triangle ABC$  外部作等腰直角三角形  $\triangle ABC', \triangle AB'C$ ，則  $\triangle AB'C'$  的面積為 \_\_\_\_\_。
9. 一線性規劃問題的可行解區域為坐標平面上由點  $A(3,4)$ 、 $B(-1,2)$ 、 $C(2,-3)$  所圍成的三角形及其內部且滿足  $5x + y \geq 18$ ；則目標函數為  $k = x + 5y + 86$  在可行解區域中的最大值為 \_\_\_\_\_。
10. 從 1000 到 2020 的正整數中，其中十位數小於個位數的正整數共有 \_\_\_\_\_ 個。
11. 如圖，已知凸四邊形  $ABCD$  的區域面積為 10，且點  $C$  一定在直線  $4x + ay = b$  上。則  $a + b =$  \_\_\_\_\_。



12. 有一個  $8 \times 8$  (鉛直線 9 條，水平線 9 條) 的方格表，從中任取二條鉛直線和二條水平線。若此四條線可圍成一個正方形之機率為  $\frac{b}{a}$  (最簡分數)，則  $a + b =$  \_\_\_\_\_。
13. 設雙曲線  $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{4} = 1$  的焦點為  $F_1, F_2$ ，弦  $\overline{AB}$  過  $F_1$ 。若  $\overline{AF_2} + \overline{BF_2} = 2\overline{AB}$ ，則  $\overline{AB} =$  \_\_\_\_\_。
14. 在  $\triangle ABC$  中， $\angle ABC = 120^\circ$ ， $\overline{AB} = 8\sqrt{3}$ ， $\overline{BC} = 10\sqrt{3}$ ，若過點  $A$  作  $\overline{AB}$  的垂線與從點  $C$  作  $\overline{BC}$  的垂線相交於  $D$ ，則  $\overline{CD} =$  \_\_\_\_\_。

15. 如下圖， $ABCDEFGH$  為一長方體，點  $Q$  在  $\overline{AD}$  上， $P$  點位於平面  $EFGH$  上，已知  $\overline{PA} = \overline{PB} = \overline{PQ} = 7$ ，且  $\overline{AB} = 6$ ， $\overline{AQ} = 10$ 。若此四面體  $PABQ$  的體積為  $a\sqrt{b}$ ，其中  $a, b$  為正整數，且  $b$  不能被任何整數的平方所整除。則  $a + b =$  \_\_\_\_\_。

(四面體的體積公式為  $\frac{1}{3} \times \text{底面積} \times \text{高}$ )



參考公式：

(一) 首項為  $a$ ，公差為  $d$  的等差數列前  $n$  項之和為  $S = \frac{n(2a + (n-1)d)}{2}$

首項為  $a$ ，公比為  $r (r \neq 1)$  的等比數列前  $n$  項之和為  $S = \frac{a(1-r^n)}{1-r}$

(二)  $\sum_{k=1}^n k = \frac{1}{2}n(n+1)$

$\sum_{k=1}^n k^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$

$\sum_{k=1}^n k^3 = \frac{1}{4}n^2(n+1)^2$

(三) 三角函數的和角公式： $\sin(A+B) = \sin A \cos B + \cos A \sin B$

$\cos(A+B) = \cos A \cos B - \sin A \sin B$

$\tan(A+B) = \frac{\tan A + \tan B}{1 - \tan A \tan B}$

(四)  $\triangle ABC$  的正弦定理： $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$  ( $R$  為  $\triangle ABC$  外接圓半徑)

$\triangle ABC$  的餘弦定理： $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C$

(五) 一維數據  $X: x_1, x_2, \dots, x_n$

算術平均數  $\mu_x = \frac{1}{n}(x_1 + x_2 + \dots + x_n) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$

標準差  $\sigma_x = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \mu_x)^2} = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i^2 - \mu_x^2}$